

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمه‌ای بر تانسورها و جبر چندخطی

عفت گلپر رابوکی
زهرا اردولالو
الهه خدابخشی
سیده زینب وحیدی

عنوان و نام پدیدآور	: مقدمه‌ای بر تانسورها و جبر چندخطی/عفت گلپرابوکی...[و دیگران].
مشخصات نشر	: قم: دانشگاه قم، ۱۳۹۹.
مشخصات ظاهری	: ۳۲۷ص.
شابک	: 978-600-843657-7
یادداشت	: عفت گلپرابوکی، زهرا اردولالو، الهه خدابخشی، سیده زینب وحیدی.
موضوع	: حساب تانسورها / Calculus of tensors
موضوع	: فیزیک ریاضی / Mathematical physics
شناسه افزوده	: گلپرابوکی، عفت، ۱۳۴۹ -
شناسه افزوده	: دانشگاه قم / University of Qom
رده بندی کنگره	: QA۴۳۳
رده بندی دیویی	: ۵۱۶/۸۳ / شماره کتابشناسی ملی: ۶۲۰۸۱۸۰



انتشارات دانشگاه قم

عنوان: مقدمه‌ای بر تانسورها و جبر چند خطی
 مؤلف: عفت گلپرابوکی، زهرا اردولالو، الهه خدابخشی، سیده زینب وحیدی
 چاپ و صحافی: هوشنگی
 ناظر فنی: علیرضا معظمی
 صفحه آرا: زهرا اردولالو
 طراح جلد: احمد رضا حیدری
 نوبت و سال چاپ: اول، تابستان ۱۳۹۹
 شمارگان: ۵۰۰
 بهاء: ۵۰۰۰۰۰ ریال
 شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۸۴۳۶-۵۷-۷

آدرس الکترونیکی: Publication@Qom.ac.ir

کلیه حقوق مادی و معنوی برای ناشر محفوظ است.

قم، بلوار الغدیر، دانشگاه قم، اداره چاپ و انتشارات دانشگاه
 تلفن: ۰۲۵-۳۳۴۴۴۳۱۰۳۳۴۵ / نمابر: ۰۲۵-۳۳۴۴۴۳۱۰۳۳۴۵

فهرست مطالب

۵	۱ داده‌های بزرگ (<i>BigData</i>)
۶	۱.۱ مقدمه
۷	۲.۱ تعریف داده های بزرگ
۸	۳.۱ چالش‌های حوزه کلان داده
۱۱	۴.۱ کاربردهای داده‌های بزرگ
۱۳	۱.۴.۱ پردازش داده های زیاد
۱۷	۲ مفاهیم اولیه جبر چندخطی (تانسوری)
۱۸	۱.۲ مقدمه
۱۹	۲.۲ تانسور
۲۱	۱.۲.۲ زیرآرایه‌ها
۲۴	۲.۲.۲ ماتریسی کردن (تبدیل تانسور به ماتریس)
۲۸	۳.۲.۲ برداری کردن
۳۰	۳.۲ حاصلضربهای تانسوری
۳۰	۱.۳.۲ ضرب وجه k تانسور در ماتریس و بردار

۳۶	ضریبهای ماتریسی	۲.۳.۲
۳۸	پایه‌ها در ضرب تانسوری	۳.۳.۲
۳۹	هم ارزی	۴.۳.۲
۴۰	ضرب خارجی	۵.۳.۲
۴۲	حاصلضرب داخلی و نرم تانسور	۶.۳.۲
۴۵	انواع تانسور	۷.۳.۲
۴۷	جمع مستقیم	۴.۲
۴۷	جمع مستقیم در ماتریس‌ها	۱.۴.۲
۴۷	جمع مستقیم در تانسورها	۲.۴.۲
۴۹	زیر فضاهای تانسوری	۵.۲
۴۹	مسائل	۶.۲

۵۳	رتبه تانسور	۳
۵۴	مقدمه	۱.۳
۵۴	رتبه در ماتریس‌ها	۲.۳
۵۵	رتبه در تانسورها	۳.۳
۵۸	رتبه چندخطی	۱.۳.۳
۶۱	زیر فضاهای حمایتی	۲.۳.۳
۶۲	جبر رتبه تانسور	۴.۳
۶۸	تعیین رتبه در تانسورهای $2 \times 2 \times 2$	۵.۳
۶۸	تعیین رتبه در تانسورهای $2 \times 2 \times 2$ با استفاده از هایپرترمینان	۱.۵.۳

۲.۵.۳	تعیین رتبه در تانسورهای $2 \times 2 \times 2$ با توجه به ساختار	
۷۲	درونی آنها	
۳.۵.۳	تعیین رتبه تانسورهای $2 \times 2 \times 2$ با توجه به مقادیر ویژه	
۶.۳	تعیین رتبه در تانسورهای $2 \times 2 \times p$	۸۱
۷.۳	فرم کلی تانسورهای $2 \times 2 \times 2$	۸۲
۱.۷.۳	فرم کلی تانسورهای $2 \times 2 \times 2$ رتبه یک	۸۲
۲.۷.۳	فرم کلی تانسورهای $2 \times 2 \times 2$ رتبه ۲	۸۳
۸.۳	برخی انواع رتبه‌ها در فضاها برداری	۹۱
۱.۸.۳	رتبه ماکزیمم	۹۱
۲.۸.۳	رتبه کروسکال	۹۳
۳.۸.۳	رتبه نوعی	۹۴
۹.۳	مسئله بهترین تقریب رتبه پایین	۹۷
۱.۹.۳	تقریب رتبه پایین وفشرده سازی ماتریس	۹۸
۲.۹.۳	تقریب رتبه پایین برای تانسورها	۹۹
۳.۹.۳	واگرایی ضرایب	۱۰۳
۱۰.۳	حل ضعیف	۱۰۴
۱۱.۳	طبقه بندی تانسورهای $2 \times 2 \times 2$	۱۰۷
۱.۱۱.۳	فرم های کانونی ماتریس های $m \times n$	۱۰۸
۲.۱۱.۳	فرم های کانونی تانسورهای $2 \times 2 \times 2$	۱۰۹
۱۲.۳	مسائل	۱۱۳

۱.۴	مقدمه	۱۱۶
۲.۴	تاریخچه تجزیه‌های تانسوری	۱۱۸
۳.۴	حاصلضرب تاکر	۱۲۰
۴.۴	تجزیه CP	۱۲۴
۱.۴.۴	روش کمترین مربعات تناوبی (ALS)	۱۲۷
۲.۴.۴	یکتایی تجزیه CP	۱۳۶
۵.۴	کاربردهای تجزیه CP	۱۳۷
۱.۵.۴	تعیین رتبه در تانسورهای $L \times M \times N$	۱۳۷
۶.۴	تجزیه تاکر	۱۴۳
۱.۶.۴	رتبه- k (رتبه وجه k ام تانسور)	۱۴۷
۲.۶.۴	محاسبه تجزیه تاکر	۱۴۹
۳.۶.۴	روش ALS	۱۵۰
۴.۶.۴	SVD مرتبه بالا ($HOSVD$)	۱۵۲
۵.۶.۴	عدم یکتایی تجزیه تاکر و راه‌هایی برای مقابله با آن	۱۵۶
۷.۴	کاربردهای تجزیه تاکر	۱۵۷
۱.۷.۴	مجموعه ارقام دستنویس هدی	۱۵۸
۲.۷.۴	مسئله تشخیص ارقام با استفاده از تجزیه $HOSVD$	۱۶۳
۳.۷.۴	بازشناسی ارقام فارسی با تانسور	۱۶۵
۴.۷.۴	$HOSVD$	۱۶۶
۸.۴	مسائل	۱۶۷

۱.۵	مقدمه	۱۷۰
۱.۱.۵	مفاهیم مورد نیاز از تانسورها	۱۷۰
۲.۵	مقادیر ویژه و بردارهای ویژه	۱۷۵
۱.۲.۵	H -مقادیر ویژه	۱۷۶
۳.۵	هایپرترمینان	۱۸۱
۴.۵	چند جمله‌ای مشخصه	۱۸۲
۵.۵	تانسورهای نامنفی	۱۸۴
۱.۵.۵	قضیه پرون فروبنیوس برای تانسورهای نامنفی تحویل ناپذیر	
		۱۸۵
۲.۵.۵	تانسورهای نامنفی تحویل ناپذیر ضعیف	۱۸۶
۳.۵.۵	قضیه مینیماکس کولاتز- ویلانت برای تانسورهای نامنفی با	
	یک بردار ویژه مثبت	۱۸۸
۴.۵.۵	قضیه پرون فروبنیوس برای تانسورهای نامنفی تحویل ناپذیر	
	ضعیف	۱۹۲
۵.۵.۵	کران بالا برای شعاع طیفی یک تانسور نامنفی	۱۹۳
۶.۵.۵	شعاع طیفی مثبت	۱۹۴
۶.۵	چندگانگی هندسی و جبری	۱۹۸
۱.۶.۵	چندگانگی هندسی	۱۹۹
۲.۶.۵	چندگانگی جبری	۲۰۱
۷.۵	E -مقادیر ویژه و Z -مقادیر ویژه	۲۰۳
۱.۷.۵	تعاریف و ویژگی‌های اساسی	۲۰۳
۸.۵	تبدیل متعامد و ناوردایی E -مقدار ویژه‌ها	۲۰۷

۹.۵	E - چند جمله‌ای مشخصه	۲۱۰
۱۰.۵	مقادیر ویژه تعمیم یافته	۲۱۱
۱۱.۵	مسائل	۲۱۲

۶	هایپرگراف	۲۱۵
۱.۶	مقدمه	۲۱۶
۲.۶	گراف	۲۱۶
۳.۶	ویژگی‌های طیفی هایپرگراف‌ها	۲۲۰
۱.۳.۶	هایپرگراف	۲۲۰
۲.۳.۶	تانسور مجاورت و مقادیر ویژه	۲۲۳
۴.۶	H^+ - مقادیر ویژه Q, L, A	۲۲۷
۵.۶	کوچکترین H - مقدار ویژه لاپلاسیان	۲۳۰
۶.۶	بزرگترین H^+ - مقدار ویژه لاپلاسیان	۲۳۲
۷.۶	بزرگترین H - مقدار ویژه و بزرگترین H - مقدار ویژه لاپلاسیان بدون علامت	۲۳۲
۸.۶	کوچکترین H^+ - مقدار ویژه لاپلاسیان بدون علامت	۲۳۴

آ		۲۳۵
۱.۰.آ	حاصلضرب خاتری رانو	۲۳۶
۲.۰.آ	رد و دترمینان حاصلضرب کرونگر	۲۵۶
۱.آ	تجزیه‌های ماتریسی	۲۶۱
۲.آ	مقادیر ویژه و بردارهای ویژه	۲۶۴
۱.۲.آ	تجزیه مقدار تکین $A \otimes B$	۲۶۶

۳.آ عمل گر برداری ۲۷۱

۲۸۳

ب

۱.ب ساخت یک تانسور از یک آرایه ۲۸۴

۲.ب ضرب تانسورها ۲۸۸

۱.۲.ب ضرب تانسور در بردار ۲۸۸

۲.۲.ب ضرب تانسور در ماتریس ۲۹۱

۳.۲.ب ضرب تانسور در تانسور ۲۹۲

۳.ب تانسورهای تاکر ۲۹۶

۱.۳.ب ساخت یک ($ttensor$) با یک تانسور هسته: ۲۹۶

۴.ب تانسورهای کروسکال ۲۹۷

۱.۴.ب ساخت یک ($ktensor$) با یک مجموعه از ماتریس ها ۲۹۷

۵.ب ساخت یک $sptensor$ ۲۹۹

پیشگفتار

بسیاری از مسائل در تشخیص تصویر و تشخیص الگو، طبقه بندی و خوشه بندی داده‌ها، یادگیری ماشین و ... مقدار زیادی از داده‌های با ابعاد بالا تولید می‌کنند که مفاهیم زیادی در آن‌ها مستتر است و نمی‌توان آن‌ها را با استفاده از کامپیوترهای استاندارد، ذخیره و پردازش کرد. تانسورها یک نمایش طبیعی و فشرده برای این داده‌های زیاد چندبعدی با استفاده از یک تقریب رتبه پایین مناسب فراهم می‌کنند. تحلیل داده‌های زیاد به تکنولوژی‌های جدیدی برای پردازش مؤثر در زمان قابل قبول نیاز دارد. تجزیه‌های تانسوری که تانسور را به صورت حاصلضرب ماتریس‌ها با تانسورهای از مراتب پایین‌تر نمایش می‌دهد، یک تکنیک مؤثر برای پردازش داده‌های زیاد ارائه می‌کند. تحلیل تانسورها به کشف ساختارهای پنهان در داده‌ها کمک می‌کند. امروزه با پیشرفت تکنولوژی و حجم بالای اطلاعات، لزوم ذخیره سازی مناسب این اطلاعات و نیز بررسی ارتباط بین آن‌ها بسیار احساس می‌شود. ماتریس‌ها و تانسورها یک روش مناسب برای ذخیره سازی داده‌ها ارائه می‌کنند و استفاده از تجزیه‌های ماتریسی و تانسوری به ما این امکان را می‌دهد که یک تقریب رتبه پایین مناسب از داده‌ها ایجاد کنیم. در بسیاری از مسائل در زمینه‌های مهندسی و داده کاوی و ... نتایج معمولاً بصورت داده‌های عددی می‌باشد که استفاده از ماتریس‌ها و تانسورها بسیار کاربرد دارد.

در بسیاری از علوم مانند مهندسی و علم اقتصاد و ... مقادیر زیادی از داده‌های ذخیره

شده وجود دارد که نیازمند تجزیه و تحلیل به منظور استخراج اطلاعات مفید برای مقاصد مختلف هستند.

استفاده گسترده از فن آوری چند سنسوری و پدید آمدن مجموعه داده‌های بزرگ، محدودیت‌های نمایش مسطح استاندارد مدل‌های ماتریسی و... ضرورت حرکت به سمت استفاده از ابزارهای تجزیه و تحلیل داده‌های متنوع را برجسته‌تر کرده است. داده‌های بزرگ شامل مجموعه داده‌های چند مدلی و چند بعدی است که بسیار پیچیده و بزرگ هستند و نمی‌توانند حتی با استفاده از محاسبات استاندارد ذخیره و پردازش شوند. داده‌های بزرگ نه تنها با حجم‌های بزرگ، بلکه با شاخصه‌های معین بسیاری نیز ارائه شده‌اند. این حجم‌های بزرگ نیازمند الگوریتم‌های مقیاس‌گذاری شده با سرعت‌های بسیار بالایی می‌باشند که با چالش‌های مربوط به پردازش داده‌ها مقابله کنند. از این رو خواستار راه‌حل‌ها و تکنولوژی‌های ابتکاری جدیدی هستیم. چنین تکنولوژی رو به پیشرفتی تجزیه تانسورها و شبکه‌های تانسوری و تقریب رتبه پایین ماتریس / تانسور می‌باشد. تانسورها (که با نام آرایه‌های چندبعدی یا آرایه‌های N راهی نیز شناخته می‌شوند) در کاربردهای وسیعی اعم از روانشناسی، شیمی، تشخیص تصویر و تشخیص الگو، یادگیری ماشین و... مورد استفاده قرار می‌گیرند.

تانسورها آرایه‌های چندبعدی هستند که با تعمیم بردارها و ماتریس‌ها به ابعاد بالاتر شکل گرفته‌اند. مفهوم رتبه تانسور و تجزیه‌های تانسوری در سال ۱۹۲۷ توسط هیچکاک مطرح شد و کروسکال نیز تعریف مستقلی از آنرا ارائه داد. مطالعه در مورد رتبه تانسورهای حقیقی نیز توسط کروسکال آغاز شد که در نتیجه آن مشخص شد تانسورهای $2 \times 2 \times 2$ دارای دو رتبه ۳ و ۲ با احتمال وقوع مثبت هستند. کروسکال همچنین رتبه نوعی تعدادی از تانسورهای با مرتبه پایین را بدست آورد. مقادیر ویژه تانسور نیز به وسیله کی^۱ و لیم^۲ مورد

^۱Qi

^۲Lim

بررسی قرار گرفت.

فصل اول، به معرفی مجموعه داده‌های بزرگ می‌پردازد. در فصل دوم، مفاهیم اصلی و پایه‌ای جبر چندخطی (تانسوری) را ارائه می‌کنیم. در فصل سوم پس از بیان مفاهیم و تعاریف کلی در مورد تانسورها، به بیان تجزیه‌های تانسوری پرداخته‌ایم. تجزیه CP ، یک تانسور را به صورت مجموع تانسورهای رتبه یک بیان می‌کند که عملکردی شبیه تجزیه SVD دارد. تجزیه تاکر نیز تانسور را به یک تانسور هسته و چند ماتریس فاکتور تجزیه می‌کند. البته محاسبه تجزیه CP معمولاً به روشهای تکراری انجام می‌شود و در نتیجه تقریبی از رتبه تانسور را می‌توان بوسیله آن بدست آورد.

یکی از مهم‌ترین مباحث در ماتریسها، رتبه ماتریس می‌باشد. هرچند که بسیاری از مفاهیم در نظریه ماتریسها به آرایه‌های چندراهی تعمیم داده شده‌اند، اما مفهوم رتبه شامل این گسترش نمی‌شود. تجزیه های ماتریسی و تانسوری از مهمترین عملیاتی هستند که منجر به محاسبه رتبه می‌گردند. فصل چهارم شامل تعاریف و قضایایی در مورد رتبه تانسورها می‌باشد. با توجه به پیچیدگی مسئله محاسبه رتبه تانسور، دسته‌های خاصی از آنها مخصوصاً تانسورهای $2 \times 2 \times 2$ مورد بررسی قرار گرفته‌اند. چند روش برای محاسبه رتبه تانسورهای $2 \times 2 \times 2$ ارائه شده است. روش اول به بررسی هایپرترمینان که یک چند جمله‌ای بر اساس درایه‌های تانسور است، می‌پردازد. سپس با استفاده از مقادیر ویژه ماتریسهای تشکیل دهنده تانسور، رتبه محاسبه می‌شود. در پایان یک دسته بندی ارائه می‌شود به طوریکه هر تانسور با استفاده از تبدیلات وارون پذیر در یکی از این دسته‌ها قرار می‌گیرد. در فصل پنجم مقادیر ویژه تانسور مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. ضربهای ماتریسی و نیز کدهای دستوری نرم افزار متلب در دو ضمیمه انتهایی آورده شده است.

سعی شده است که مطالب کتاب به صورت ساده و روان ارائه شود. همچنین برای درک بهتر بعضی از مطالب از شکل استفاده شده است. در پایان هر فصل تعدادی تمرین مطابق با

مباحث همان فصل گنجانده شده است که حل آن می‌تواند به دانشجو در درک مفاهیم آن فصل کمک کند. این کتاب می‌تواند به عنوان منبع یک درس چهار واحدی برای دانشجویان کارشناسی ارشد و دکتری ارائه شود.

در پایان از صاحب نظران محترم تقاضا داریم که هرگونه نظر، پیشنهاد و انتقاد سازنده در جهت ارتقای علمی این کتاب را به مولفین ابلاغ نمایند.

ومن الله توفیق

مولفان: عفت گلپر رابوکی، زهرا اردولالو، الهه خدابخشی، سیده زینب وحیدی